

DÉVELOPPEMENTS DU CADRAN EN L DES ÉGYPTIENS

Ferdinando Roveda

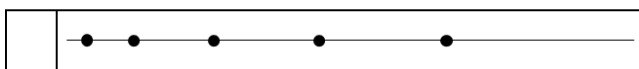
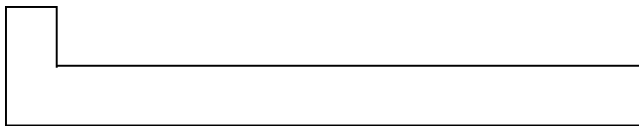
Peut-être connaissez-vous ce cadran solaire portable, en forme de L, utilisé par les Égyptiens il y a 3 500 ans ? L'auteur, partant du concept de cet instrument nous amène, au cours d'une longue balade gnomonique très originale, à examiner ses déclinaisons possibles...

Notations utilisées

α : demi-arc diurne (en degrés)
 δ : déclinaison solaire
 φ : latitude locale
 θ : angle horaire du Soleil (en degrés)
 η : hauteur du Soleil
 η_1 : hauteur du Soleil au solstice d'été
 η_2 : hauteur du Soleil au solstice d'hiver
 τ : inclinaison plane du cadran en L
 g : hauteur du bras court du cadran en L
 h : hauteur du plan incliné
 l : largeur de la base du cadran en L

LE CADRAN EN L DES ÉGYPTIENS

Le cadran solaire égyptien en forme de L, schématisé ci-dessous, est bien connu des experts, même s'il existe de nombreux débats sur son utilisation réelle (voir par exemple l'article¹ de A. Gunella).



Mettant ces discussions de côté, voyons les évolutions possibles de cet instrument, qui n'ont jamais été considérées, du moins à ma connaissance, étant donné que tout ce qui est décrit ci-dessous a été calculé pour la latitude du Caire (30°N), et pour l'ancien système de temps, c'est-à-dire en considérant l'heure comme la douzième partie du temps entre le lever et le coucher du Soleil (donc une heure variable selon la période de l'année considérée).

On pourra se référer, au sujet de ces « heures temporaires », à l'article de P.-L. Cambefort² paru dans le n° 4 de ce magazine.

FORMULES PRÉLIMINAIRES

Par souci d'exhaustivité, rappelons d'abord comment calculer l'angle horaire du Soleil, à partir de la formule bien connue du demi-arc diurne :

$$\cos \alpha = -\tan \delta * \tan \varphi$$

D'où l'angle horaire d'une heure temporaire :

$$\theta = \alpha / 6$$

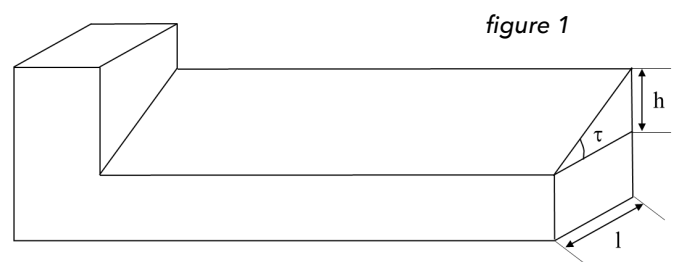
La formule qui indique la hauteur η du Soleil pour chaque heure, latitude, et déclinaison solaire est également bien connue :

$$\sin \eta = \sin \delta * \sin \varphi + \cos \delta * \cos \varphi * \cos \theta$$

LE CADRAN EN L À PLAN INCLINÉ « TORDU »

Tout commence par le souhait de faciliter au maximum l'utilisation de l'instrument, en alignant simplement son long bras dans la direction du Soleil pendant l'utilisation.

Commençons par modifier le bras long du L, en en faisant un plan incliné « tordu », comme le montre la figure 1 suivante.



Dès lors, bien sûr, la relation suivante s'applique :

$$h = l * \tan \tau$$

Dans un premier temps, nous devons émettre des hypothèses sur certaines dimensions approximatives, compatibles avec son utilisation en tant que cadran portable, et calculer l'inclinaison τ de manière appropriée.

En particulier, pour ce dernier paramètre, on s'assure que sa valeur nous permette d'avoir toujours la même distance de la ligne horaire 6

¹ A. Gunella – Il più antico orologio solare egiziano – Gnomonica n° 7 – Sept. 2000

² https://www.cadrans-solaires.info/wp-content/uploads/2022/06/mag-CSpour-tous-n4_PL-Cambefort.pdf

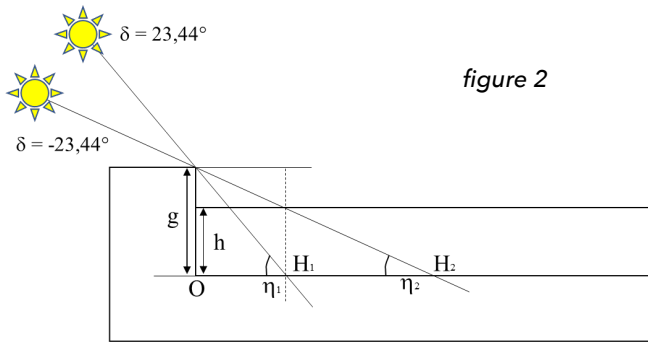


figure 2

au « gnomon » (le bras court du L). Pour atteindre cet objectif, il suffira de poser, en référence à la figure 2 ci-dessus et à ses notations :

$$h = g * (\tan \eta_1 - \tan \eta_2) / \tan \eta_1$$

En combinant cette équation avec la précédente, nous obtenons immédiatement la valeur recherchée de τ :

$$\tan \tau = g * (\tan \eta_1 - \tan \eta_2) / (l * \tan \eta_1)$$

Cette dernière formule nous permet également, en l'écrivant sous une forme différente, de trouver la distance l_i de chaque droite saisonnière (droite de la date « i ») à partir du bord inférieur du plan incliné (solstice d'été), à savoir :

$$l_i = g * (\tan \eta_1 - \tan \eta_i) / (\tan \eta_1 * \tan \tau)$$

Cette valeur est calculée sur le plan horizontal, mais peut être rapportée sur le plan incliné simplement avec la formule :

$$l_{ih} = l_i / \cos \tau$$

Ou encore :

$$l_{ih} = g * (\tan \eta_1 - \tan \eta_i) / (\tan \eta_1 * \sin \tau)$$

Il va sans dire que la hauteur h de chaque ligne saisonnière peut également être calculée comme suit :

$$h_i = l_i * \tan \tau$$

Et comme la hauteur du gnomon « réel » à utiliser pour calculer chaque point horaire sur la ligne saisonnière « i » sera donnée par :

$$g_i = g - h_i$$

La distance de chaque point de chaque ligne horaire par rapport au gnomon peut alors être calculée par la formule :

$$PH_i = (g - h_i) / \tan \eta_i$$

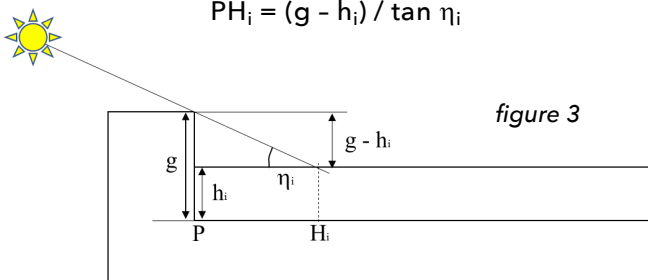


figure 3

Si nous ramenons ces points au plan incliné et que nous les joignons de manière appropriée pour tracer les lignes horaires et les lignes saisonnières, nous obtiendrons le schéma ci-dessous (vue perpendiculaire au plan contenant les lignes horaires et saisonnières).

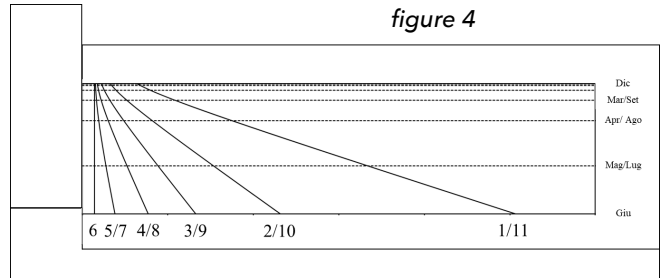


figure 4

On constate immédiatement que :

- la ligne de 6 heures (vrai midi local) est droite et parallèle au bras court du L,
- les autres lignes horaires ne sont pas des droites, mais se rapprochent de lignes droites (chaque ligne horaire peut être approchée avec au moins 2 segments de ligne droite),
- les lignes de temps se resserrent autour du solstice d'hiver, ce qui rend difficile la lecture de l'heure au milieu de la journée,
- d'autre part, l'utilisation est facilitée, puisqu'il suffit (c'était l'une des conditions de départ) d'orienter le long bras du L (côté gnomon) dans la direction du Soleil.

La première amélioration que l'on peut faire pour réduire la difficulté des lignes resserrées est de diviser la surface avec les lignes horaires en deux parties, l'une pour la période printemps-été, l'autre pour la période automne-hiver, créant deux plans inclinés distincts (une sorte de « toit à pignon », voir la figure 5 ci-dessous).

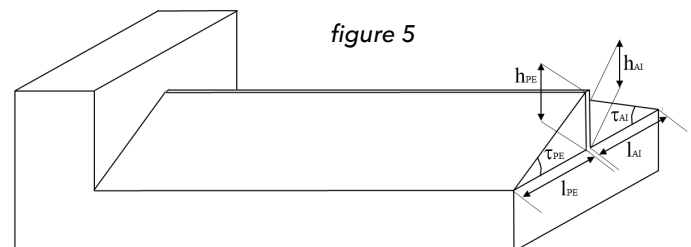


figure 5

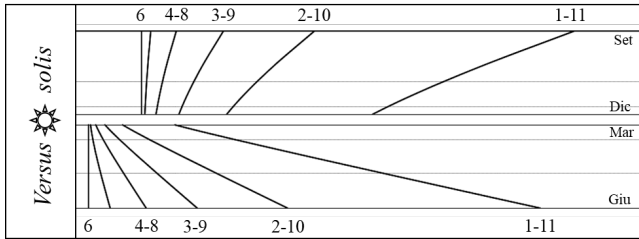
Le processus de calcul des lignes horaires et saisonnières est similaire à ce qui a été fait jusqu'à présent ; évidemment, le processus devra être divisé en deux étapes distinctes :

- la première utilisant pour η_1 et η_2 les hauteurs du Soleil respectivement au solstice d'été et à l'équinoxe,

- la seconde utilisant pour η_1 et η_2 les hauteurs du Soleil respectivement à l'équinoxe et au solstice d'hiver.

La figure 6 ci-dessous montre le résultat obtenu en suivant ces étapes.

figure 6



La situation s'améliore, mais pas de manière décisive... L'interpolation avec des segments de droite est également améliorée, limitant l'erreur de lecture (par rapport à la ligne calculée) à un maximum d'environ 8 min d'heure temporaire.

LE CADRAN MULTIPLAN INCLINÉ TORDU

« L'appétit vient en mangeant »... Si avec un plan incliné nous avons réussi à avoir une ligne horaire droite alignée avec le gnomon, avec plusieurs plans inclinés, un pour chaque ligne horaire, toutes les lignes horaires seront droites et parallèles au gnomon !

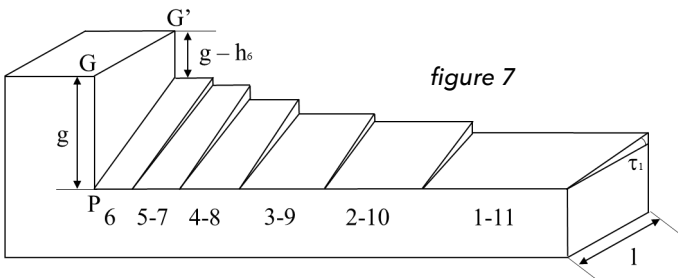
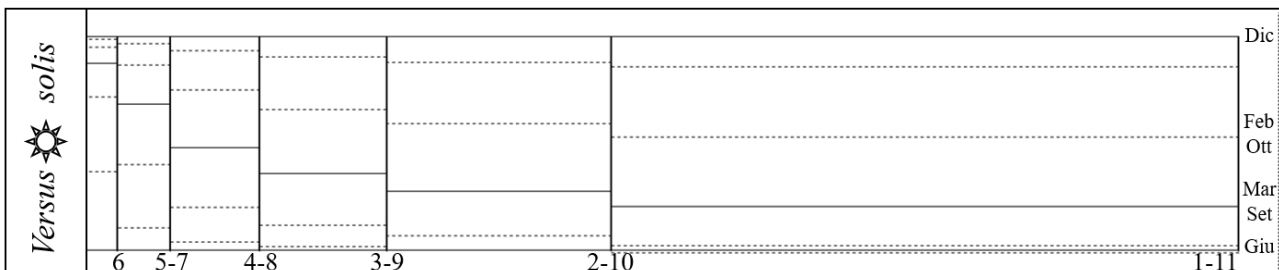


figure 7

Le processus à suivre est toujours le même, la seule précaution étant de calculer une pente pour chaque ligne horaire, comme si vous deviez calculer 6 cadrans à plan incliné tordu au lieu d'un seul. Bien sûr, les lignes de date différeront également d'un étage à l'autre, ce qui complique malheureusement un peu la vie dans les phases de conception et de construction.

Cependant, le résultat est conforme aux attentes. Ci-dessous (figure 8) la représentation

figure 8



du résultat final (les lignes horaires ont été placées, pour plus de simplicité, sur le bord de chaque « marche »).

Il y a cependant un point très important à souligner. Le doute qui surgit immédiatement est que dans les mois autour du solstice d'hiver, lorsque le Soleil est bas, cette conception par « marches » peut être un obstacle à la propagation du « rayon d'ombre ». C'est-à-dire qu'en référence à la figure 9, nous devons vérifier que la relation suivante est constamment satisfaite :

$$\Delta d * \tan \eta_i > \Delta h$$

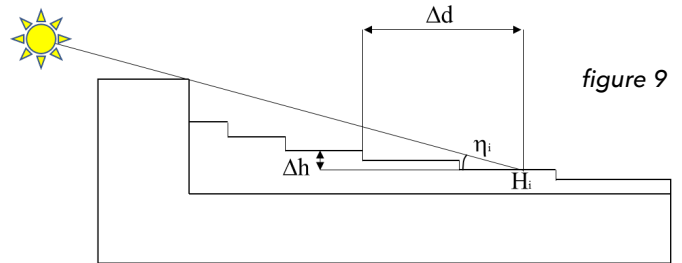


figure 9

Dans l'ensemble, la condition ci-dessus est toujours mathématiquement remplie, mais comme on l'a supposé, dans les mois autour du solstice d'hiver, la marge est extrêmement limitée, ce qui rend l'utilisation de l'instrument très critique.

Encore une fois, la première idée qui vient à l'esprit pour tenter de surmonter le problème est de recourir à une double série de plans inclinés (figure 10), créant ainsi une surface qui ressemble au dos d'un crocodile.

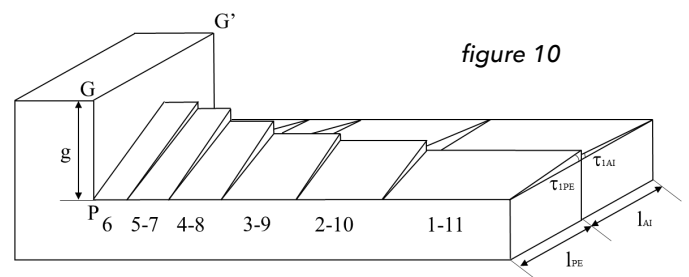
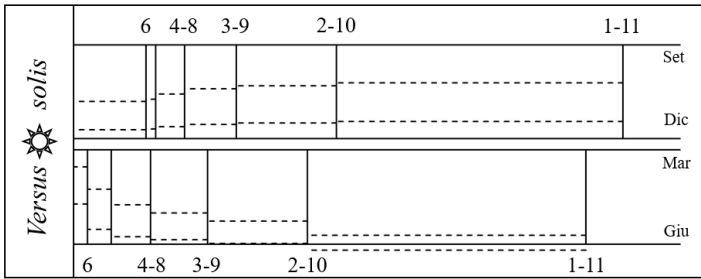


figure 10

Comme on l'a supposé, la situation s'améliore, mais pas au point de pouvoir être considérée comme décisive...

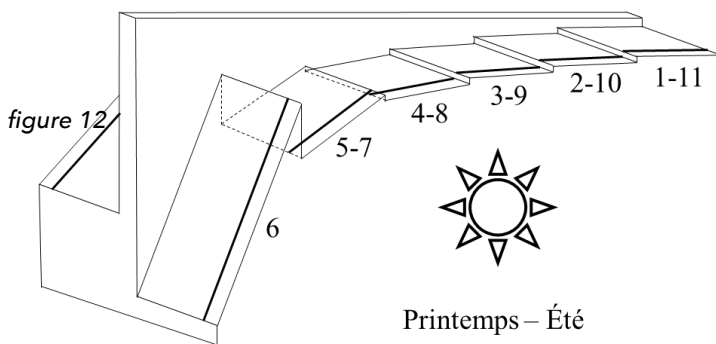
figure 11



LE CADRAN À PLUSIEURS ÉTAGES EN « DENTS DE SCIE »

Il y a encore une étape, pratiquement évidente, qui peut être franchie à partir de l'étape actuelle schématisée ci-dessus (figure 11).

Vous pouvez en effet essayer de réorganiser tous ces « coins d'heure » à côté du gnomon au lieu d'une distance croissante, en oubliant la forme originale en forme de L des égyptiens, et, en outre, de façon à ce que les différentes lignes d'heure soient non seulement parallèles les unes aux autres, mais aussi toutes placées à la même distance du gnomon (figure 12 ci-dessous).



Placer les plans inclinés à côté du gnomon est absolument trivial : le processus logique à suivre pour le calcul est identique à ce qui a été fait dans le cas précédent.

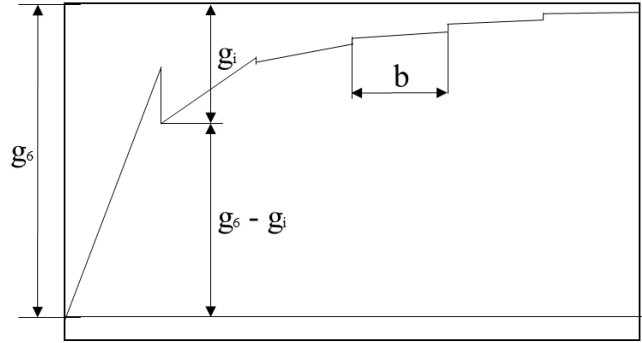
La nouveauté, cependant, réside dans le fait de rechercher un positionnement vertical approprié, de sorte qu'il permette d'éloigner les lignes horaires du gnomon toujours de la même distance, afin que toutes les lignes horaires soient alignées. C'est-à-dire qu'il faudra s'assurer que :

$$g_i / \tan \eta_i = g_6 / \tan \eta_6$$

L'indice 6 est ici indicatif de la ligne horaire de l'heure 6, et l'indice « i » indique toute autre ligne de temps.

Il suffira alors de placer les points inférieurs de chaque plan incliné de la manière indiquée sur la figure 13 ci-après.

figure 13

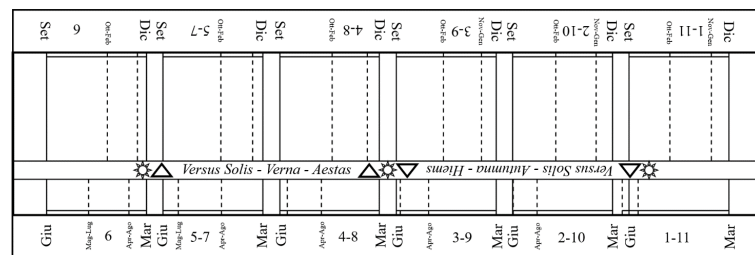


Compte tenu des expériences précédentes (et de mon inclination vers la beauté de la symétrie...) j'ai immédiatement choisi de diviser les lignes horaires en deux sections distinctes : l'une pour la période printemps-été, l'autre pour la période automne-hiver.

Le résultat final est présenté à la figure 14 ci-dessous ; il convient de noter que :

- sur la partie supérieure du gnomon il y a des triangles dont les sommets indiquent de quel côté de l'instrument le Soleil doit se trouver en fonction de la période de l'année,
- pour faciliter la lecture, un espace a également été inséré entre une ligne horaire (un plan incliné) et la suivante.

figure 14



MORALE DE L'HISTOIRE

Je ne pense pas que quiconque rêvera jamais de fabriquer une telle « montre », peut-être juste quelques amateurs de gnomonique et de bricolage !

La satisfaction réside donc seulement dans le fait d'avoir essayé, également parce que je ne sais pas si, dans un passé plus ou moins récent, quelqu'un a déjà suivi une voie similaire ; s'il a essayé, voire réussi, il a peut-être considéré une telle solution comme inintéressante d'un point de vue pratique et l'a mise à la poubelle...

Ferdinando Roveda (protokyte21@protonmail.com) est ingénieur, passionné de gnomonique depuis son plus jeune âge : à 4 ans il fut attiré pour la première fois par un cadran solaire... il se consacre aujourd'hui à l'étude de la gnomonique.